**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

**отчет**

**по лабораторной работе №2**

**по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»**

**Тема: Частотный анализ полиномиальных приближений**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 8383 |  | Киреев К.А. |
| Студент гр. 8383 |  | Муковский Д.В. |
| Преподаватель |  | Середа А.-В.И. |

Санкт-Петербург

2021

**Цель работы.**

Анализ частотных характеристик известных формул полиномиального сглаживания временных рядов и формул численного интегрирования.

**Основные теоретические положения.**

В качестве временного ряда рассматривается дискретный сигнал с шагом дискретизации, равным единице.

Под полиномиальным сглаживанием понимается аппроксимация в смысле МНК значений конечного (нечетного) числа элементов сглаживаемого ряда полиномом заданного порядка с присвоением среднему из этих элементов значения сглаживающего полинома в центре выбранного временного отрезка. Такой подход соответствует так называемому сглаживанию в скользящем окне.

В качестве исследуемых формул численного интегрирования используются квадратурные формулы Ньютона-Котеса.

**Постановка задачи.**

Получить формулы для передаточных функций нерекурсивных фильтров, соответствующих полиномиальному сглаживанию дискретного сигнала для полиномов различного порядка и построить графики . Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций. Провести сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций для различных степеней полиномов. Получить формулы для передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам Ньютона-Котеса различного порядка. Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций. Провести сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций для различных квадратурных формул.**Порядок выполнения работы.**

1. Вывести формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию прямой линией по 3, 5, 7 и 9 точкам. Построить графики . Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций для различного количества точек.
2. Вывести формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом второй степени по 7, 9, 11 и 13 точкам. Построить графики . Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций для различного количества точек.
3. Вывести формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом четвёртой степени по 9, 11, 13 и 15 точкам. Построить графики . Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций для различного количества точек.
4. Вывести формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию по формулам Спенсера по 13, 15 и 21 точкам. Построить графики . Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций для различного количества точек.
5. Построить графики из предыдущих пунктов в логарифмической шкале (Дб). Объясните, чем отличаются данные графики от полученных ранее и объясните их смысл.
6. Провести сопоставительный анализ свойств передаточных функций, полученных при выполнении пп. 1-4.
7. Вывести формулы передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона. Построить графики передаточных функций и графики отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному. Проинтерпретировать частотные свойства полученных передаточных функций.
8. Вывести формулу передаточной функции рекурсивного фильтра, соответствующего квадратурной формуле:



Построить график передаточной функции и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному. Проинтерпретировать частотные свойства передаточной функции.

1. Провести сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций, полученных при выполнении пп. 7 и 8.

**Ход работы.**

Моделирование и построение графиков производилось с помощью языка Python и библиотек numpy, matplotlib, seaborn. Исходный код представлен в приложении А.

1. Выведем формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию прямой линией:

Входной сигнал: 

Выходной сигнал: 

Приближение по МНК прямой линией по m точкам:



Посчитаем частные производные по А и В, получим:



Тогда система нормальных уравнений:



В итоге получаем:



В общем случае:











или





Формула для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию прямой линией по 3 точкам:



По 5 точкам:



По 7 точкам:



По 9 точкам:



Графики для передаточных функций на интервале  представлены рис. 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| https://sun9-75.userapi.com/ozh9q32iN__0duVzOf5kj1EQMnaZbLPgKRa7ag/KaME_tgDHVU.jpg  a | | https://sun9-14.userapi.com/gUwTWT_eiepX-Hg-UUOZsp4ps6C_iZhsd7iY2w/N88TbStbrY8.jpg  b | |
| https://sun1-24.userapi.com/CNDDHz9b3M_Nec_ivMSdZv6Cet--FFFfJy_08Q/TKrExjJ_brs.jpg  c | | https://sun9-37.userapi.com/j_8ADCLd8nYxAtWKa78vKNfFgKcGMixU3wf_Qw/qGXylV6ulQ0.jpg  d | |
|  |  | |

Рисунок 1 – Графики передаточной функции при сглаживании прямой линией по 3(a), 5(b), 7(c) и 9(d) точкам

1. Выведем формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом второй степени:

Входной сигнал: 

Выходной сигнал: 

Приближение по МНК прямой линией по m точкам:



Посчитаем частные производные по А и В, получим:



Система нормальных уравнений:



Подставим во второе уравнение:



Тогда:



В итоге получаем:



Для 7 точек:





В общем случае:















Аналогично посчитаем для 9, 11, 13 точек.

Формула для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом второй степени по 9 точкам:



По 11 точкам:



По 13 точкам:



Графики для передаточных функций на интервале  представлены рис. 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| https://sun9-29.userapi.com/I73b76Lv1Aqa44BXoHi-XVBEk6U9IjDzX7PsAQ/JvvSfpDLWqA.jpg  a | | https://sun9-34.userapi.com/JhdRX59moXSOyiiqokvBwx63BH5N5Az6bsLeUQ/7fJVGQYFxSQ.jpg  b | |
| https://sun9-13.userapi.com/Id5m5RZeBnpngNWw1AuNBOmIBYsSzUoEv8TuBQ/hAjeTjq7MEg.jpg  c | | https://sun9-49.userapi.com/mUE-LFILFy1XfwXr6DHVZwqHpMkOMtvGD8drXg/Pa_M4MiVc18.jpg  d | |
|  |  | |

Рисунок 2 – Графики передаточной функции при сглаживании полиномом второй степени по 7(a), 9(b), 11(c) и 13(d) точкам

1. Выведем формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом четвертой степени:

Входной сигнал: 

Выходной сигнал: 

Приближение по МНК прямой линией по m точкам:



Посчитаем частные производные по А, C и Е, получим:





Система нормальных уравнений:

**

Выразим C из первого уравнения системы нормальных уравнении:



Подставим теперь C во второе и третье уравнение:



Выразим из 2 уравнения E и подставим в 3 уравнение

И выразим из 3 уравнения A:



В итоге получаем:



Для 9 точек:





В общем случае:















Аналогично посчитаем для 11, 13, 15 точек.

Формула для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом четвертой степени по 11 точкам:



По 13 точкам:



По 15 точкам:



Графики для передаточных функций на интервале  представлены рис. 3.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| https://sun9-49.userapi.com/kRNu_YAmLSYV33SNT8NYarf03bMoWb80LWKoWg/6iKguRz0mR0.jpg  a | | https://sun9-74.userapi.com/j5phQpFOFulDU9W-tW5GPYThYD_who-sbbKaSw/HCSrmthm2eQ.jpg  b | |
| https://sun9-26.userapi.com/qkbwWxik9Wxc_J0Al5kyd6ubZRopqjyFd8nsvQ/Gh2CH9FHEEg.jpg  c | | https://sun9-24.userapi.com/pQ3GfpkHB8mDYUFiix_q-AOlgDpHXSHDWWDfgg/7aUYV5qNeMg.jpg  d | |
|  |  | |

Рисунок 3 – Графики передаточной функции при сглаживании полиномом четвертой степени по 9(a), 11(b), 13(c) и 15(d) точкам

1. Выведем формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию по формулам Спенсера.

Формулы сглаживания Спенсера для 15 и 21 точек:





Соответствующие передаточные функции:





Графики для передаточных функций на интервале  представлены рис. 4.

|  |  |
| --- | --- |
| https://sun9-67.userapi.com/Q0wMXrr3nBDBB8-ZpFRp_DPsa0o15wDPis7ZUg/3nWaXlWg5Qo.jpg  c | https://sun9-43.userapi.com/eWRd5GVRED2EyyjO9huzyb3_wSsnn7MxzW5bpg/tgXfeW51yiw.jpg  d |

Рисунок 4 – Графики передаточной функции при сглаживании по формулам Спенсера по 15(a), 21(b) точкам

1. Построим графики из предыдущих пунктов в логарифмической шкале (дБ). Графики представлены на рис. 5-8

Кривые, построенные ранее, недостаточно информативны, так как значения на высоких частотах настолько малы, что невозможно решить насколько они хороши. Поэтому лучше использовать логарифмы чисел  Для этой цели используются децибелы:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| https://sun9-45.userapi.com/ffoFqL6Za6zXuAF5-tyHV1HQi_Surftjdp9siQ/WdOJAInZMDk.jpg  a | | https://sun9-33.userapi.com/0SK3r8PsS4CH8JJJ-vZniRz9Z8oh3Ex76vtRSA/9cHNeAxtiME.jpg  b | |
| https://sun9-51.userapi.com/ohGGwtfDv85M_nitvrXA3vrpU8yzU33OPIrf3A/ggnmsYIH07E.jpg  c | | https://sun9-25.userapi.com/WxUHZmZG_3ZMnP7JgTi181c_0QiMnobukVsA7Q/P9gu_0iKaoE.jpg  d | |
|  |  | |

Рисунок 5 – Графики передаточной функции при сглаживании прямой линией по 3(a), 5(b), 7(c) и 9(d) точкам в логарифмической шкале.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| https://sun9-7.userapi.com/mDAp6_7Y-2PRr-CO_uTXO8sgXFbwPmMj-uxQPQ/ahbyGY-wlio.jpg  a | | https://sun9-17.userapi.com/OA6i1cidyZzWKHg0cNA-CNDfv1ng5IdKOTKZTQ/fdN5dyM4e58.jpg  b | |
| https://sun9-32.userapi.com/hVNB6qXsiz9NDpJqpuxYG_dgW0d3S75JXqq71w/4_dFFafm2_k.jpg  c | | https://sun9-69.userapi.com/pyRipVfxGFkFepGCODgHxq-gysDB5wiYelZJDA/-W0E08y6kpw.jpg  d | |
|  |  | |

Рисунок 6 – Графики передаточной функции при сглаживании полиномом второй степени по 7(a), 9(b), 11(c) и 13(d) точкам в логарифмической шкале.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| https://sun9-48.userapi.com/FNhGORgtsQPs07Mee1HG--w8aNhrrt-0xEE6qg/SZEZJkZSiuE.jpg  a | | https://sun9-75.userapi.com/i2uuSZ5K53SGq-juAEkNuB8NZbVsG_QGy0ejVg/g0zV7ezM0yQ.jpg  b | |
| https://sun9-53.userapi.com/3SUOMqkmhWhSG5A3a-a-q6yEkFyJe1VZ3KLc4Q/4DHpaKt4LYI.jpg  c | | https://sun9-72.userapi.com/E9JqS7Iay3WW5FMtk_KVMM6mk_Jc06eN_7pv9g/__nFiVY7Nsw.jpg  d | |
|  |  | |

Рисунок 7 – Графики передаточной функции при сглаживании полиномом четвертой степени по 9(a), 11(b), 13(c) и 15(d) точкам в логарифмической шкале.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| https://sun9-54.userapi.com/mjamky7rCLMCHeX527iJB3kM8zt5m15-sNHVyA/mEUEuPYvGyM.jpg  a | | https://sun1-90.userapi.com/FMDceipij72FhG2AM1RLzr6vDw9J-shBYEjyJA/7MvelS9k2DE.jpg  b | |
|  |  | |

Рисунок 8 – Графики передаточной функции при сглаживании по формулам Спенсера по 15(a), 21(b) точкам в логарифмической шкале.

1. Проведем сопоставительный анализ свойств передаточных функций, полученных при выполнении пп. 1-4.

Были получены графики (рис. 1-4) передаточных функций нерекурсивных фильтров, соответствующих сглаживанию прямой линией, полиномом второй степени, полиномом четвёртой степени и формулам Спенсера. Графики соответствуют ожиданиям.

1. Выведем формулы передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Формула прямоугольников:



Пусть  и , тогда:













Точное значение интеграла  равно , тогда отношение значений:





Формула трапеций:



Пусть  и , тогда:











Точное значение интеграла  равно , тогда отношение значений:





Формула Симпсона:



Пусть  и , тогда:









Точное значение интеграла  равно , тогда отношение значений:





Графики передаточных функций и графики отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному для формул прямоугольников, трапеций и Симпсона представлены на рис. 9, 10, 11 соответственно.

|  |  |
| --- | --- |
| https://sun9-23.userapi.com/fMrNrYu55SkaDQOMGljm5C1BSors-jcyuZSH2Q/DUKH7vvxK6w.jpg  a | https://sun9-31.userapi.com/NUPordqfTyJBEDqiqVy23t9ijBuq4ikANdBmPA/qJo7m8xLy_0.jpg  b |

Рисунок 9 – График передаточной функции(a) и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному(b) для формул прямоугольников

|  |  |
| --- | --- |
| https://sun9-10.userapi.com/YRnQgjNwlodvh2Rl0IXMZ5DwR84C7aMmPqr8hg/oBSE10DMUuU.jpg  a | https://sun9-31.userapi.com/NqGwHrvAdkllvwJ0dtoNo976lPJvWU4uoMWnbw/qabjiwWjRtg.jpg  b |

Рисунок 10 – График передаточной функции(a) и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному(b) для формул трапеций

|  |  |
| --- | --- |
| https://sun9-3.userapi.com/Qx4FOaYRtUKV-xpyWLPsserfqpS0EXhoz-SDLw/9RUmRP6nOFc.jpg  a | https://sun9-24.userapi.com/FHcNStWGKbXQvv1vN_em6tYdMKtES7QcV7JweA/XSRBV7Ty9b4.jpg  b |

Рисунок 11 – График передаточной функции(a) и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному(b) для формул Симпсона

1. Выведем формулу передаточной функции рекурсивного фильтра, соответствующего квадратурной формуле:



Пусть  и , тогда:













Точное значение интеграла  равно , тогда отношение значений:





Соответствующие график передаточных функций и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному представлены на рис. 12.

|  |  |
| --- | --- |
| https://sun9-70.userapi.com/Kg8kd9DfWhAfJNw2-cOr-_M0bYHgiPUImCeaHA/Ft3akN8_PYg.jpg  a | https://sun9-19.userapi.com/2h5u4cXSz3d5XT57MeSbi7XBXIpWbirKhUf0GA/_uP7K_JE5E0.jpg  b |

Рисунок 12 – График передаточной функции(a) и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному(b) для квадратурной формулы (60)

1. Проведем сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций, полученных при выполнении пп. 7 и 8.

Были получены графики (рис 9-12) передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона, а также квадратурной формуле (60). Графики соответствуют ожиданиям.

**Выводы.**

В ходе выполнения лабораторной работы был проведен анализ частотных характеристик известных формул полиномиального сглаживания временных рядов и формул численного интегрирования, были построены соответствующие графики.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**ИСХОДНЫЙ КОД**

m = 4

w <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

w1<-w\*(2\*pi)

H<-sin(((2\*m+1)\*w1)/2)/((2\*m+1)\*sin(w1/2))

par(mgp=c(2,1,0))

plot(w,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H7<-(1/21)\*(7+12\*cos(2\*pi\*f)+6\*cos(4\*pi\*f)-4\*cos(6\*pi\*f))

H9<-(1/231)\*(59+108\*cos(2\*pi\*f)+78\*cos(4\*pi\*f)+28\*cos(6\*pi\*f)-42\*cos(8\*pi\*f))

H11<-(1/429)\*(89+168\*cos(2\*pi\*f)+138\*cos(4\*pi\*f)+88\*cos(6\*pi\*f)+18\*cos(8\*pi\*f)-72\*cos(10\*pi\*f))

H13<-(1/143)\*(25+48\*cos(2\*pi\*f)+42\*cos(4\*pi\*f)+32\*cos(6\*pi\*f)+18\*cos(8\*pi\*f)-22\*cos(12\*pi\*f))

par(mgp=c(2,1,0))

plot(f,H7,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,H9,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,H11,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,H13,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H9<-(1/429)\*(179+270\*cos(2\*pi\*f)+60\*cos(4\*pi\*f)-110\*cos(6\*pi\*f)+30\*cos(8\*pi\*f))

H11<-(1/429)\*(143+240\*cos(2\*pi\*f)+120\*cos(4\*pi\*f)-20\*cos(6\*pi\*f)-90\*cos(8\*pi\*f)+36\*cos(10\*pi\*f))

H13<-(1/2431)\*(677+1200\*cos(2\*pi\*f)+780\*cos(4\*pi\*f)+220\*cos(6\*pi\*f)-270\*cos(8\*pi\*f)-396\*cos(10\*pi\*f)+220\*cos(12\*pi\*f))

H15<-(1/46189)\*(11063+20250\*cos(2\*pi\*f)+15000\*cos(4\*pi\*f)+7510\*cos(6\*pi\*f)-330\*cos(8\*pi\*f)-5874\*cos(10\*pi\*f)-5720\*cos(12\*pi\*f)+4290\*cos(14\*pi\*f))

par(mgp=c(2,1,0))

plot(f,H9,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,H11,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,H13,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,H15,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H15<-(1/320)\*(74+134\*cos(2\*pi\*f)+92\*cos(4\*pi\*f)+42\*cos(6\*pi\*f)+6\*cos(8\*pi\*f)-10\*cos(10\*pi\*f)-12\*cos(12\*pi\*f)-6\*cos(14\*pi\*f))

H21<-(1/350)\*(60+114\*cos(2\*pi\*f)+94\*cos(4\*pi\*f)+66\*cos(6\*pi\*f)+36\*cos(8\*pi\*f)+12\*cos(10\*pi\*f)-4\*cos(12\*pi\*f)-10\*cos(14\*pi\*f)-10\*cos(16\*pi\*f)-6\*cos(18\*pi\*f)-2\*cos(20\*pi\*f))

plot(f,H15,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,H21,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

m = 2

w <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

w1<-w\*(2\*pi)

H<-20\*log(abs(sin(((2\*m+1)\*w1)/2)/((2\*m+1)\*sin(w1/2))),10)

par(mgp=c(2,1,0))

plot(w,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H7<-(1/21)\*(7+12\*cos(2\*pi\*f)+6\*cos(4\*pi\*f)-4\*cos(6\*pi\*f))

H9<-(1/231)\*(59+108\*cos(2\*pi\*f)+78\*cos(4\*pi\*f)+28\*cos(6\*pi\*f)-42\*cos(8\*pi\*f))

H11<-(1/429)\*(89+168\*cos(2\*pi\*f)+138\*cos(4\*pi\*f)+88\*cos(6\*pi\*f)+18\*cos(8\*pi\*f)-72\*cos(10\*pi\*f))

H13<-(1/143)\*(25+48\*cos(2\*pi\*f)+42\*cos(4\*pi\*f)+32\*cos(6\*pi\*f)+18\*cos(8\*pi\*f)-22\*cos(12\*pi\*f))

par(mgp=c(2,1,0))

plot(f,20\*log(abs(H7),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,20\*log(abs(H9),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,20\*log(abs(H11),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

plot(f,20\*log(abs(H13),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H9<-(1/429)\*(179+270\*cos(2\*pi\*f)+60\*cos(4\*pi\*f)-110\*cos(6\*pi\*f)+30\*cos(8\*pi\*f))

H11<-(1/429)\*(143+240\*cos(2\*pi\*f)+120\*cos(4\*pi\*f)-20\*cos(6\*pi\*f)-90\*cos(8\*pi\*f)+36\*cos(10\*pi\*f))

H13<-(1/2431)\*(677+1200\*cos(2\*pi\*f)+780\*cos(4\*pi\*f)+220\*cos(6\*pi\*f)-270\*cos(8\*pi\*f)-396\*cos(10\*pi\*f)+220\*cos(12\*pi\*f))

H15<-(1/46189)\*(11063+20250\*cos(2\*pi\*f)+15000\*cos(4\*pi\*f)+7510\*cos(6\*pi\*f)-330\*cos(8\*pi\*f)-5874\*cos(10\*pi\*f)-5720\*cos(12\*pi\*f)+4290\*cos(14\*pi\*f))

par(mgp=c(2,1,0))

plot(f,20\*log(abs(H9),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))

grid()

plot(f,20\*log(abs(H11),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))

grid()

plot(f,20\*log(abs(H13),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))

grid()

plot(f,20\*log(abs(H15),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H15<-(1/320)\*(74+134\*cos(2\*pi\*f)+92\*cos(4\*pi\*f)+42\*cos(6\*pi\*f)+6\*cos(8\*pi\*f)-10\*cos(10\*pi\*f)-12\*cos(12\*pi\*f)-6\*cos(14\*pi\*f))

H21<-(1/350)\*(60+114\*cos(2\*pi\*f)+94\*cos(4\*pi\*f)+66\*cos(6\*pi\*f)+36\*cos(8\*pi\*f)+12\*cos(10\*pi\*f)-4\*cos(12\*pi\*f)-10\*cos(14\*pi\*f)-10\*cos(16\*pi\*f)-6\*cos(18\*pi\*f)-2\*cos(20\*pi\*f))

plot(f,20\*log(abs(H15),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim = c(-150,0))

grid()

plot(f,20\*log(abs(H21),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim = c(-150,0))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H<- Im(1/(2\*1i\*sin(pi\*f)))

par(mgp=c(2,1,0))

plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim = c(-150,0))

grid()

H<- Im(cos(pi\*f)/(2\*1i\*sin(pi\*f)))

plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim = c(-150,0))

grid()

H<- Im((cos(2\*pi\*f)+2)/(3\*1i\*sin(2\*pi\*f)))

plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim = c(-150,0))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H<-(pi\*f)/(sin(pi\*f))

plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(gamma(italic("f"))),ylim = c(0,1.6))

grid()

H<-cos(pi\*f)\*((pi\*f)/(sin(pi\*f)))

plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(gamma(italic("f"))),ylim = c(0,1.6))

grid()

H<-((cos(2\*pi\*f)+2)/3)\*((2\*pi\*f)/sin(2\*pi\*f))

plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(gamma(italic("f"))),ylim = c(0,1.6))

grid()

f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)

H<-Im((cos(3\*pi\*f)+3\*cos(pi\*f))/(8i\*sin(3\*pi\*f)))

plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))

grid()

H<-(1/12)\*(cos(3\*pi\*f)+3\*cos(pi\*f))\*((3\*pi\*f)/sin(3\*pi\*f))

plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(gamma(italic("f"))),ylim = c(-4,4))

grid()